Лекция 10. Моделирование неординарных потоков событий.

Моделирование потоков Пальма

Поток ординарных событий называется потоком Пальма, если интервалы между его последовательными событиями представляют собой независимые случайные величины η_j, $j = \overline{1,n}$, т.е. имеет место свойство ограниченного последействия. Следовательно, для этого потока справедливо соотношение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) * f_2(x_2) * ... * f_n(x_n),$$

которое и определяет общий принцип моделирования потока Пальма. Необходимо с помощью соответствующих функций плотностей $f_j(x_j)$, $j = \overline{1,n}$ найти реализации x_j, $j = \overline{1,n}$ всех интервалов между событиями потока и по формуле

$$t_j = t_{j-1} + x_j$$

вычислить искомые моменты $\{t_j\}$.

На практике чаще приходится иметь дело со стационарным потоком Пальма, для которого справедливо соотношение

$$f_1(x_1) \neq f_2(x_2) = f_3(x_3) = ... = f_n(x_n) = f(x).$$

Если функция плотности $f(x)$, характеризующая все интервалы, кроме первого, задана, то для определения безусловной функции плотности $f_1(x_1)$ используется формула Пальма

$$f_1(x_1) = \lambda \left(1 - \int_0^{x_1} f(x)dx \right), \tag{63}$$

где $\lambda = \dfrac{1}{M[\eta]}$.

Поэтому для задания потоков Пальма достаточно знать лишь функцию плотности $f(x)$. В качестве $f(x)$ могут использоваться функции, подчиненные различным законам распределения, в том числе закону Эрланга и экспоненциальному. Следовательно, потоки Эрланга, включая и простейший поток, являются частными случаями потока Пальма.

Последнее замечание может показаться сомнительным, так как простейший поток, подчиняясь свойству отсутствия последействия, имеет одинаковое распределение для всех интервалов между его событиями, включая и первый.

Это противоречие легко снимается формулой Пальма (63), которая оказывается справедливой и для простейшего потока с функцией плотности

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Действительно,

$$f_1(x_1) = \lambda \left(1 - \lambda \int_0^{x_1} e^{-\lambda x} dx \right) = \lambda e^{-\lambda x_1}.$$

Алгоритм для моделирования стационарного потока Пальма состоит из двух этапов.

Предварительный этап

Шаг 1. Вычислить по заданной функции плотности $f(x)$ математическое ожидание интервалов η_j, $j > 1$ и определить интенсивность потока Пальма

$$\lambda = \frac{1}{M[\eta]}.$$

Шаг 2. По формуле Пальма найти закон распределения первого интервала.

Шаг 3. Используя метод преобразования случайных величин, например, метод обратной функции, получить зависимости

$$x_1 = F_1^{-1}(z_1) \text{ è } x_j = F^{-1}\left(z_j\right), j > 1$$

для нахождения реализаций интервалов между событиями потока Пальма.

Основной этап

Шаг 1. Положить $j = 1$.

Шаг 2. Получить реализацию z базовой случайной величины ξ.

Шаг 3. Проверить условие $j = 1$. Если условие нарушено, переход на шаг 5 .

Шаг 4. Вычисление $x_1 = F_1^{-1}(z_1)$. Переход на шаг 6.

Шаг 5. Вычисление $x_j = F^{-1}\left(z_j\right), j > 1$.

Шаг 6. Определение моментов появления событий потока $t_j = t_{j-1} + x_j$.

Шаг 7. Принять $j = j + 1$.

Шаг 8. Проверить условие $j > n$. При нарушении этого условия возврат на шаг 2.

Шаг 7. Вывод $\{t_j\}$.

В заключение поясним оговорку, сделанную при описании алгоритма для моделирования потоков Эрланга. Так как поток Эрланга обладает свойством ограниченного последействия, то закон распределения его первого интервала отличается от закона распределения остальных интервалов и должен определяться по формуле Пальма. Однако даже для потоков Эрланга 2-го порядка эта процедура, связанная с интегрированием функции (59), очень сложна и требует приближенных вычислений. Поэтому в прикладных задачах отличием законов распределения первого и остальных интервалов между событиями потоков Эрланга обычно пренебрегают.

Моделирование неординарного потока событий

Пусть поток событий является неординарным и количество событий, наступающих в момент времени t_j, является дискретной случайной величиной с заданным законом распределения вероятностей

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

Тогда для моделирования количества событий, наступивших в момент t_j, можно воспользоваться методами моделирования дискретных случайных величин, описанных ранее. А сами моменты t_j наступления событий потока моделируются точно так же, как и для ординарных потоков, рассмотренных в этом разделе.

Приведем алгоритм для моделирования неординарного стационарного потока Пальма.

Предварительный этап

Шаг 1. По заданной функции плотности $f(x)$ вычислить математическое ожидание интервалов η_j $(j > 1)$ и определить интенсивность λ потока Пальма.

Шаг 2. По формуле Пальма определить $f_1(x_1)$.

Шаг 3. Получить зависимости

$$x_1 = F_1^{-1}(z_1) \text{ è } x_j = F^{-1}\left(z_j\right), j > 1.$$

Основной этап

Шаг 4. Положить $j = 1$.

Шаг 5. Получить реализацию z базовой случайной величины ξ.

Шаг 6. Принять $k = 1$.

Шаг 7. Проверить условие $z \le \sum_{i=1}^{k} P_i$. При выполнении этого условия переход на шаг 9.

Шаг 8. Принять $k = k + 1$. Возврат на шаг 4.

Шаг 9. За очередную реализацию случайной величины ν примем значение k, т.е. $\nu = k$.

Шаг 10. Проверить условие $j = 1$. Если условие нарушено, переход на шаг 12.

Шаг 11. Определить реализацию первого интервала между событиями потока $x_1 = F_1^{-1}(z_1)$.

Шаг 12. Вычислить $x_j = F^{-1}(z_j)$, $j \ne 1$.

Шаг 13. Определение моментов появления событий потока $t_j = t_{j-1} + x_j$.

Шаг 14. Принять $j = j + 1$.

Шаг 15. Проверить условие $j > n$. При нарушении этого условия возврат на шаг 2.

Шаг 16. Вывод $\{\nu, t_j\}$.

Контрольные вопросы:

1. Какие потоки являются неординарными? Приведите пример потока.
2. Приведите алгоритм моделирования неординарного потока.
3. Для чего применяется формула Пальма?